ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 2017 FILIÈRE MP

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – B – (X)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

***

On utilise la notation allégée pour l'intégrale d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$

$$\int f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Si f est une fonction de deux variables réelles t, x, on note $\partial_t f = \frac{\partial f}{\partial t}$, $\partial_x f = \frac{\partial f}{\partial x}$, $\partial_{xx} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ les dérivées partielles de f (sous réserve de leur existence).

Si n est un entier naturel, on note $\mathscr{C}_b^n$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$ et dont toutes les dérivées $f, f', \ldots, f^{(n)}$, jusqu'à l'ordre n, sont bornées.

On dit qu'une fonction $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une mesure si elle est continue, positive, intégrable sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$\int m(x)dx = 1.$$

On considère la fonction $h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $h(0) = 0$ et pour $x > 0$,

$$h(x) = x\ln(x).$$

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet une entropie relativement à une mesure m si f est continue et $h(f^2)m$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. De même, on dit que f admet une variance relativement à m si f est continue et f^2m est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On admet que la fonction μ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$$

est une mesure.

Ce problème étudie certaines inégalités fonctionnelles. Dans les parties I et II, on étudie un opérateur différentiel lié à la mesure μ et on démontre une inégalité pour cette mesure. Dans la partie III, on voit comment une telle inégalité en entraine une seconde, et on étudie une forme de réciproque. La partie IV est indépendante des autres, et s'intéresse à une inégalité pour les fonctions caractéristiques.

Préliminaires

Soit m une mesure.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui admet une variance relativement à m. Montrer que fm est intégrable. En conséquence, le réel

$$\mathrm{Var}_m(f) = \int f(x)^2 m(x)dx - \left(\int f(x)m(x)dx\right)^2$$

est bien défini. Montrer que $\mathrm{Var}_m(f) \geqslant 0$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui admet une entropie relativement à m.

2a. Montrer que $f^2 m$ est intégrable. En conséquence, le réel

$$\mathrm{Ent}_m(f) = \int h(f(x)^2)m(x)dx - h\left(\int f(x)^2 m(x)dx\right)$$

est bien défini.

2b. Soit $a > 0$. Montrer que

$$\forall x \geqslant 0, \quad h(x) \geqslant (x-a)h'(a) + h(a),$$

avec inégalité stricte si $x \neq a$.

2c. Montrer que $\mathrm{Ent}_m(f) \geqslant 0$.
On pourra utiliser la question précédente avec $a = \int f(x)^2 m(x)dx$.

2d. On suppose ici que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m(x) > 0$. Caractériser les fonctions f telles que $\mathrm{Ent}_m(f) = 0$.

Partie I

On note L l'opérateur qui à une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, associe la fonction Lf définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Lf(x) = \frac{1}{2}f''(x) - xf'(x).$$

On étend également cette définition aux fonctions $f(t,x)$ de deux variables, en posant

$$Lf(t,x) = \frac{1}{2}\partial_{xx}f(t,x) - x\partial_x f(t,x),$$

sous réserve que ces quantités soient définies au point $(t,x) \in \mathbb{R}^2$.

On rappelle que la mesure μ a été définie dans l'introduction.

3a. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Montrer que $Lf = \dfrac{1}{2\mu}(\mu f')'$.

3b. Soient h_1, h_2 deux fonctions de $\mathscr{C}_b^2$. Montrer que

$$\int h_1(x)(Lh_2)(x)\mu(x)dx = -\frac{1}{2}\int h_1'(x)h_2'(x)\mu(x)dx,$$

après avoir justifié l'existence de chacun des termes de la formule.

On considère une fonction $f \in \mathscr{C}_b^0$. On définit pour $(t,x) \in \mathbb{R}^2$

$$\Phi_f(t,x) = \int f(x\cos t + y\sin t)\mu(y)dy.$$

4. Montrer que la fonction $\Phi_f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est bien définie et continue.

5. On suppose que $f \in \mathscr{C}_b^2$.

5a. Montrer que, sur $\mathbb{R}^2$, Φ_f est de classe $\mathscr{C}^1$ et $\partial_{xx}\Phi_f$ est bien définie, continue et bornée.

5b. Soit $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Trouver une relation entre $\partial_x\Phi_f(t,x)$ et $\Phi_{f'}(t,x)$.

5c. Montrer que pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, on a $\partial_t\Phi_f(t,x)\cos t = L\Phi_f(t,x)\sin t$.

5d. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\int \Phi_f(t,x)\mu(x)dx = \int f(x)\mu(x)dx$.

On admet pour la suite du problème que cette égalité reste vraie pour tout $f \in \mathscr{C}_b^0$.

Partie II

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction de $\mathscr{C}_b^0$ positive. On définit pour $t \in \mathbb{R}$

$$J(t) = \int h(\Phi_f(t,x))\mu(x)dx.$$

6. Montrer que $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, et calculer $J(0)$ et $J\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

7. On suppose dans toute cette question que $f \in \mathscr{C}_b^2$ et qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant \delta.$$

7a. Montrer que J est alors de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad J'(t)\cos t = -\frac{\sin t}{2}\int \frac{(\partial_x\Phi_f(t,x))^2}{\Phi_f(t,x)}\mu(x)dx.$$

On note $g = (f')^2/f$.

7b. Soit $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\Phi_{f'}(t,x)^2 \leqslant \Phi_f(t,x)\Phi_g(t,x).$$

7c. Conclure que

$$\int h(f(x))\mu(x)dx - h\left(\int f(y)\mu(y)dy\right) \leqslant \frac{1}{4}\int g(x)\mu(x)dx.$$

8. Montrer que pour tout $f \in \mathscr{C}_b^2$, f admet une entropie relativement à μ et que

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) \leqslant \int |f'(x)|^2\mu(x)dx.$$

On pourra considérer la famille de fonctions définies par $f_\delta = \delta + f^2$ pour $\delta > 0$.

Partie III

Soit m une mesure. On suppose dans cette partie qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et de dérivée f' bornée, alors f admet une entropie relativement à m et

$$\mathrm{Ent}_m(f) \leqslant C\int |f'(x)|^2 m(x)dx. \tag{1}$$

9. Montrer que $\displaystyle\int (1+|x|+x^2)m(x)dx < +\infty$.

10. Soit $f \in \mathscr{C}_b^1$. On souhaite montrer que f admet une variance relativement à m et que

$$\mathrm{Var}_m(f) \leqslant \frac{C}{2}\int |f'(x)|^2 m(x)dx. \tag{2}$$

10a. Montrer que fm et f^2m sont intégrables, et qu'il suffit de montrer (2) dans le cas où on a de plus $\displaystyle\int f(x)m(x)dx = 0$ et $\displaystyle\int f(x)^2 m(x)dx = 1$.

10b. Sous les hypothèses de la question précédente, montrer (2).
On pourra appliquer (1) à la famille de fonctions $f_\varepsilon = 1 + \varepsilon f$ pour $\varepsilon > 0$.

11. Soit f une fonction de $\mathscr{C}_b^1$, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|f'(x)| \leqslant 1$. On note, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$H(\lambda) = \int e^{\lambda f(x)} m(x)dx.$$

On admet que H est de classe $\mathscr{C}^1$ et que l'on obtient une expression de $H'(\lambda)$ en dérivant sous le signe intégral de manière usuelle (on pourrait le démontrer comme précédemment).

11a. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda H'(\lambda) - H(\lambda) \ln H(\lambda) \leqslant \frac{C\lambda^2}{4} H(\lambda).$$

11b. En déduire que pour $\lambda \geqslant 0$,

$$\int e^{\lambda f(x)} m(x)dx \leqslant \exp\left(\lambda \int f(x)m(x)dx + \frac{C\lambda^2}{4}\right). \tag{3}$$

On pourra étudier la fonction $\lambda \mapsto \frac{1}{\lambda} \ln H(\lambda)$.

12. Montrer que l'inégalité (3) s'applique à la fonction définie par $f(x) = x$.

On pourra utiliser la suite de fonctions définies par $f_n(x) = n \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$.

13a. Soient $M = \int xm(x)dx$ et $a \geqslant M$. Montrer que

$$\int_a^{+\infty} m(x)dx \leqslant \exp\left(-\frac{(a-M)^2}{C}\right).$$

13b. Conclure que pour tout $\alpha < \frac{1}{C}$, la fonction $x \mapsto e^{\alpha x^2} m(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Partie IV

14. Soient $p, q, r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_*^+$ trois fonctions continues, à valeurs strictement positives et intégrables sur $\mathbb{R}$.

14a. Montrer qu'il existe une fonction $u :]0,1[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ bijective telle que

$$\forall t \in]0,1[, \quad u'(t)p(u(t)) = \int p(x)dx.$$

De même, il existe une fonction analogue $v :]0,1[\to \mathbb{R}$ pour q.

14b. On suppose que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad p(x)q(y) \leqslant \left(r\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)^2. \tag{4}$$

Montrer que

$$\left(\int p(x)dx\right)\left(\int q(x)dx\right) \leqslant \left(\int r(x)dx\right)^2. \tag{5}$$

On pourra utiliser, après avoir justifié son caractère licite, le changement de variable défini par $x = \frac{u(t)+v(t)}{2}$ *dans le membre de droite de l'inégalité* (5).

On admet pour la suite du problème que l'inégalité (5) reste vraie en supposant uniquement que $p, q, r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ sont des fonctions à valeurs positives, continues par morceaux, intégrables sur $\mathbb{R}$, et qui vérifient (4).

Si $A \subset \mathbb{R}$, on note $\mathbb{1}_A$ sa fonction caractéristique définie par $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ si $x \notin A$. On note $d(x, A) = \inf\{|x - y| : y \in A\}$ la distance de $x \in \mathbb{R}$ à A.
On note Int le sous-ensemble de $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ dont les éléments sont les réunions finies d'intervalles de $\mathbb{R}$. Si $A \in \text{Int}$, alors $\mathbb{1}_A$ est continue par morceaux, et on définit le réel

$$\mu(A) = \int \mathbb{1}_A(x)\mu(x)dx \in [0, 1].$$

15. Soit $A \subset \mathbb{R}$.

15a. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp\left(\frac{1}{2}d(x, A)^2 - x^2\right) \mathbb{1}_A(y) \exp\left(-y^2\right) \leqslant \exp\left(-\frac{(x+y)^2}{2}\right).$$

15b. On suppose que $A \in \text{Int}$ et que $\mu(A) > 0$. En déduire que

$$\int \exp\left(\frac{1}{2}d(x, A)^2\right) \mu(x)dx \leqslant \frac{1}{\mu(A)}.$$

16. Soit $A \in \text{Int}$. Pour $t \geqslant 0$, on définit l'ensemble $A_t = \{x \in \mathbb{R} : d(x, A) \leqslant t\}$.

16a. Montrer que $A_t \in \text{Int}$ pour tout $t \geqslant 0$.

16b. On suppose de plus que $\mu(A) > 0$. Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, on a

$$1 - \mu(A_t) \leqslant \frac{e^{-t^2/2}}{\mu(A)}.$$

* *
*

Polytechnique MP 2017 - Épreuve B - corrigé

Préliminaires

1. Les fonctions $\sqrt{m}$ et $f\sqrt{m}$ sont L^2 (on sous-entendra : "sur $\mathbb{R}$") car m et f^2m sont L^1, donc leur produit fm est intégrable.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$\left(\int f(x)m(x)\,dx\right)^2 = \left(\int f(x)\sqrt{m(x)}\cdot\sqrt{m(x)}\,dx\right)^2 \le \left(\int f(x)^2m(x)\,dx\right)\cdot\left(\int m(x)\,dx\right) = \int f(x)^2m(x)\,dx$$
donc $\mathrm{Var}_m(f) \ge 0$.

2.

(2a.) On remarque que $x \ge e \Rightarrow h(x) \ge x$. On en déduit : $\forall x \ge 0,\ x \le \min(e, h(x))$.
Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)^2m(x) \le \min(em(x), h(f(x)^2)m(x))$. Comme $x \mapsto em(x)$ et $x \mapsto h(f(x)^2)m(x)$ sont intégrables, on en déduit que f^2m est intégrable.

(2b.) On pose $\varphi(x) = h(x) - h(a) - h'(a)(x-a)$. Pour $x > 0$, $\varphi'(x) = h'(x) - h'(a)$ et $\varphi''(x) = 1/x > 0$. On en déduit que φ' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Comme $\varphi'(a) = 0$, φ est strictement décroissante sur $[0,a]$ (continuité en 0) et strictement croissante sur $[a,+\infty[$. Or $\varphi(a) = 0$, donc $\forall x \ge 0$, $\varphi(x) > \varphi(a)$ si $x \ne a$.

(2c.) On pose $a = \displaystyle\int f(x)^2m(x)\,dx$. Si $a = 0$, la continuité de f et m montre que $f^2m = 0$. Pour tout x, on a donc $f(x)^2 = 0$ ou $m(x) = 0$, donc $h(f(x))^2m(x) = 0$. De là, $\mathrm{Ent}_m(f) = \displaystyle\int h(f(x)^2)m(x)\,dx - h(a) = 0$.
Si $a > 0$, on a d'après 2.b. : $h(f(x))^2 \ge h(a) + h'(a)(f(x)^2 - a)$ pour tout $x \ge 0$. On multiplie par $m(x)$ et on intègre, il vient : $\displaystyle\int h(f(x))^2m(x)\,dx \ge h(a) + h'(a)\left(\int f(x)^2m(x)\,dx - a\right) = h\left(\int f(x)^2m(x)\,dx\right)$, donc $\mathrm{Ent}_m(f) \ge 0$.

(2d.) Nous montrons que les fonctions d'entropie nulle sont les fonctions constantes.
On reprend les calculs précédents. Dans le cas $a = 0$, on obtient $f = 0$ (identiquement) car m ne s'annule pas. Dans le cas $a > 0$, l'égalité $\mathrm{Ent}_m(f) = 0$ implique que $x \mapsto [h(f(x)^2) - h(a) - h'(a)(f(x)^2 - a)]m(x)$ est nulle (car elle est positive et continue). Comme m ne s'annule pas, on obtient le cas d'égalité de 2b., donc $f(x)^2 = a$ pour tout x, c'est-à-dire que f est constante (continuité).
Il est immédiat que les fonctions constantes sont d'entropie nulle, ce qui achève la preuve.

Partie I

3.

(3a.) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\mu f')(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}f'(x)$ donc $(\mu f')'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}[-2xf'(x) + f''(x)] = 2\mu(x)Lf(x)$, ce qui montre bien : $Lf = \dfrac{1}{2\mu}(\mu f')'$.

(3b.) Les fonctions h_1' et h_2' sont continues et bornées, donc $h_1'h_2'\mu$ est L_1. D'après 3a., $(\mu h_2')' = 2\mu Lh_2$. On intègre formellement par parties :
$$\int h_1'(h_2'\mu) = [h_1(h_2'\mu)] - \int h_1 \cdot 2\mu Lh_2.$$
Le crochet est bien convergent et nul car h_1 et h_2' sont bornées et μ tend vers 0 en $\pm\infty$. On en déduit la convergence de la seconde intégrale, et l'égalité demandée.

4. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto f(x\cos t + y\sin t)\mu(y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ (théorèmes généraux) ;
pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, $y \mapsto f(x\cos t + y\sin t)\mu(y)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (donc continue par morceaux) ;
pour tout t, x, y, $|f(x\cos t + y\sin t)\mu(y)| \le \|f\|_\infty\mu(y)$. Or $y \mapsto \|f\|_\infty\mu(y)$ est intégrable, donc Φ_f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

5.

(5a.) Notons $F(t,x,y) = f(x\cos t + y\sin t)\mu(y)$. Mentionnons une fois pour toute qu'à (t,x) fixé, $y \mapsto F(t,x,y)$ est continue et intégrable.
Fixons $t \in \mathbb{R}$. D'après les théorèmes généraux, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto F(t,x,y)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par :
$\dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x,y) = (\cos t)f'(x\cos t + y\sin t)\mu(y)$.
Remarquons que cette formule définit, pour tout x, une fonction continue de y.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, $|(\cos t)f'(x\cos t + y\sin t)\mu(y)| \le \|f'\|_\infty\mu(y)$. Cette dernière fonction est intégrable, et d'après le théorème de dérivation, la fonction $x \mapsto \Phi_f(t,x)$ est C^1 (attention, à t fixé!) et a pour dérivée :
$\dfrac{\partial\Phi_f}{\partial x}(t,x) = \displaystyle\int (\cos t)f'(x\cos t + y\sin t)\mu(y)\,dy$.

Par un raisonnement identique au 4. (on domine l'intégrande par $y \mapsto ||f'||_\infty \mu(y)$), on constate que cette dérivée partielle définit une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

On fixe maintenant $x \in \mathbb{R}$. On a cette fois, pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$\dfrac{\partial F}{\partial t}(t, x, y) = (-x \sin t + y \cos t) f'(x \cos t + y \sin t)\mu(y)$.

Pour $(t, y) \in \mathbb{R}^2$, $|(-x \sin t + y \cos t) f'(x \cos t + y \sin t)\mu(y)| \leq (|x| + |y|)||f'||_\infty \mu(y)$. Cette dernière fonction est continue et intégrable ($= o(e^{-|y|})$ en $\pm\infty$), donc le théorème de dérivation montre que $t \mapsto \Phi_f(t, x)$ est C^1 (à x fixé), de dérivée : $\dfrac{\partial \Phi_f}{\partial t}(t, x) = \displaystyle\int (-x \sin t + y \cos t) f'(x \cos t + y \sin t)\mu(y)\, \mathrm{d}y$.

L'intégrande est continue par rapport à (t, x). Soit $A > 0$. Pour tout $x \in [-A, A]$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on domine : $|(-x \sin t + y \cos t) f'(x \cos t + y \sin t)\mu(y)| \leq (A + |y|)\mu(y)$, fonction L^1, et on conclut que $\dfrac{\Phi_f}{\partial t}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Finalement, les deux dérivées partielles de Φ_f sont continues sur $\mathbb{R}^2$, donc Φ_f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Fixons $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x, y) = (\cos t)^2 f''(x \cos t + y \sin t)\mu(y)$. Or, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|(\cos t)^2 f''(x \cos t + y \sin t)\mu(y)| \leq ||f''||_\infty \mu(y)$.

On en déduit que $\dfrac{\partial^2 \Phi_f}{\partial x^2}(t, x) = \displaystyle\int (\cos t)^2 f''(x \cos t + y \sin t)\mu(y)\, \mathrm{d}y$.

À nouveau, la continuité de $\partial_{xx}\Phi_f$ se démontre comme au 4., en dominant par $||f''||_\infty \mu(y)$. Cette domination montre en outre, pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^2$:

$|\partial_{xx}\Phi_f(t, x)| \leq \displaystyle\int ||f''||_\infty \mu(y)\, \mathrm{d}y = ||f''||_\infty$, donc $\partial_{xx}\Phi_f$ est bornée sur $\mathbb{R}^2$.

(5b.) La formule du 5a. montre : $\partial_x \Phi_f(t, x) = (\cos t)\Phi_{f'}(t, x)$.

(5c.) $L\Phi_f(t, x) = \displaystyle\int \frac{1}{2}[(\cos t)^2 f''(x \cos t + y \sin t) - x(\cos t) f'(x \cos t + y \sin t)]\mu(y)\, \mathrm{d}y$

donc $(\sin t)L\Phi_f(t, x) = \dfrac{(\cos t)^2}{2} \displaystyle\int (\sin t) f''(x \cos t + y \sin t)\mu(y)\, \mathrm{d}y - x(\cos t) \int (\sin t) f'(x \cos t + y \sin t)\mu(y)\, \mathrm{d}y$

On remarque $\mu'(y) = -2y\mu(y)$, puis on intègre par parties (le crochet étant "convergent" et nul) :

$\displaystyle\int (\sin t) f''(x \cos t + y \sin t)\mu(y)\, \mathrm{d}y = [f'(x \cos t + y \sin t)\mu(y)\, \mathrm{d}y] + 2 \int f'(x \cos t + y \sin t) y\mu(y)\, \mathrm{d}y = 2 \int f'(x \cos t + y \sin t) y\mu(y)\, \mathrm{d}y$.

Finalement, $(\sin t)L\Phi_f(t, x) = (\cos t)^2 f'(x \cos t + y \sin t) y\mu(y)\, \mathrm{d}y - (\cos t) \displaystyle\int x \sin t f'(x \cos t + y \sin t)\mu(y)\, \mathrm{d}y =$

$(\cos t) \displaystyle\int (x \sin t - y \cos t) f'(x \cos t + y \sin t)\mu(y)\, \mathrm{d}y = (\cos t)\partial_t \Phi_f(t, x)$.

(5d.) Le membre de droite ne dépend pas de t, on va montrer que le membre de gauche est constant.

Notons, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G(t) = \displaystyle\int \Phi_f(t, x)\mu(x)\, \mathrm{d}x$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \Phi_f(t, x)\mu(x)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée $t \mapsto \partial_t \Phi_f(t, x)\mu(x)$.

Or $|\partial_t \Phi_f(t, x)| \leq \displaystyle\int (|x| + |y|)||f'||_\infty \mu(y)\, \mathrm{d}y = A|x| + B$ avec $A = ||f'||_\infty$ et $B = ||f'||_\infty \displaystyle\int |y|\mu(y)\, \mathrm{d}y$. On en déduit la domination : $|\partial_t \Phi_f(t, x)\mu(x)| \leq (A|x| + B)\mu(x)$. Cette fonction est intégrable, donc G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $G'(t) = \displaystyle\int \partial_t \Phi_f(t, x)\mu(x)\, \mathrm{d}x$.

Pour $t \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, on a donc, d'après 5c. : $G'(t) = \displaystyle\int (\tan t) L\Phi_f(t, x)\mu(x)\, \mathrm{d}x$.

Avec 3a. puis 5b. : $\displaystyle\int L\Phi_f(t, x)\mu(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}[\mu(x)\partial_x \Phi_f(t, x)] = \frac{1}{2}[\cos(t)\mu(x)\Phi_{f'}(t, x)] = 0$ car $\Phi_{f'}$ est bornée (par $||f'||_\infty$), d'où $G'(t) = 0$.

Comme G' est continue, on en déduit que G' est identiquement nulle, donc G est constante.

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi_f(0, x) = \displaystyle\int f(x)\mu(y)\, \mathrm{d}y = f(x)$, donc $G(0) = \displaystyle\int \Phi_f(0, x)\mu(x)\, \mathrm{d}x = \int f(x)\mu(x)\, \mathrm{d}x$.

Partie II

6. Φ_f est continue d'après 4., et un calcul immédiat montre qu'elle est positive et bornée sur $\mathbb{R}^2$ par $||f||_\infty$. Comme h est continue sur $\mathbb{R}_+$, et en particulier bornée sur $[0,||f||_\infty]$, on en déduit que $h\circ\Phi_f$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}^2$.

En dominant l'intégrande par $x\mapsto ||f||_\infty\mu(x)$, on constate que J et continue, et un calcul rapide montre $J(0)=\int h(f(x))\mu(x)\,\mathrm{d}x$ et, en posant $a=\int f(y)\mu(y)\,\mathrm{d}y$: $J(\pi/2)=\int h(a)\mu(x)\,\mathrm{d}x=h(a)$.

On peut remarquer au passage : $J(0)-J(\pi/2)=\mathrm{Ent}_\mu(\sqrt{f})$.

7.

(7a.) Par croissance de l'intégrale, $\delta\le\Phi_f(t,x)\le ||f||_\infty$. Or h est C^1 sur $[\delta,+\infty[$, donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto h(\Phi_f(t,x))\mu(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée :
$t\mapsto \partial_t\Phi_f(t,x)h'(\Phi_f(t,x))\mu(x)$.
La fonction h' est continue, donc bornée, mettons par M, sur $[\delta,||f||_\infty]$ et on a trouvé au 5d. deux constantes positives A et B telles que $|\partial_t\Phi_f(t,x)h'(\Phi_f(t,x))\mu(x)|\le(A|x|+B)M\mu(x)$.
D'après le théorème de dérivation, J est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et avec 5c. :
$(\cos t)J'(t)=\int(\cos t)\partial_t\Phi_f(t,x)h'(\Phi_f(t,x))\mu(x)\,\mathrm{d}x=\int(\sin t)L\Phi_f(t,x)[1+\ln\Phi_f(t,x)]\mu(x)\,\mathrm{d}x.$
Comme t est fixé, on applique 3a. à $x\mapsto\Phi(t,x)$, donc $(\cos t)J'(t)=\int\frac{(\sin t)}{2}\partial_x[\mu(x)\partial_x\Phi(t,x)]\cdot[1+\ln\Phi_f(t,x)]\,\mathrm{d}x$.
On intègre par parties : $(\cos t)J'(t)=\frac{\sin(t)}{2}\left([\mu(x)\partial_x\Phi(t,x)(1+\ln\Phi_f(t,x))]-\int\frac{\partial_x\Phi_f(t,x)}{\Phi_f(t,x))}\mu(x)\partial_x\Phi(t,x)\,\mathrm{d}x\right)=$
$-\frac{\sin t}{2}\int\frac{\partial_x\Phi_f(t,x)^2}{\Phi_f(t,x))}\mu(x)\,\mathrm{d}x.$
L'intégration par parties est bien licite car pour tout (t,x) : $|\mu(x)\partial_x\Phi(t,x)(1+\ln\Phi_f(t,x))|\le||f'||_\infty M\mu(x)$, ce qui entraîne la convergence et la nullité du crochet.

(7b.) Notons que f étant minorée par δ et f' bornée, la fonction g est bornée et $g\mu$ est intégrable. On fixe (t,x). Les fonctions $y\mapsto\sqrt{f(x\cos t+y\sin t)\mu(y)}$ et $y\mapsto\sqrt{g(x\cos t+y\sin t)\mu(y)}$ sont L^2 donc leur produit $y\mapsto |f'(x\cos t+y\sin t)\mu(y)|$ est intégrable, et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}\Phi_{f'}(t,x)^2&=\left(\int f'(x\cos t+y\sin t)\mu(y)\,\mathrm{d}y\right)^2\le\left(\int|f'(x\cos t+y\sin t)|\mu(y)\,\mathrm{d}y\right)^2\\&=\left(\int\sqrt{f(x\cos t+y\sin t)\mu(y)}\sqrt{g(x\cos t+y\sin t)\mu(y)}\,\mathrm{d}y\right)^2\\&\le\int f(x\cos t+y\sin t)\mu(y)\,\mathrm{d}y\int g(x\cos t+y\sin t)\mu(y)\,\mathrm{d}y=\Phi_f(t,x)\cdot\Phi_g(t,x).\end{aligned}$$

(7c.) Pour tout $t\in]0,\pi/2[$, en appliquant 5b. : $J'(t)=-\frac{\tan t}{2}\int\frac{\partial_x\Phi_f(t,x)^2}{\Phi_f(t,x))}\mu(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{\sin(2t)}{4}\int\frac{\Phi_{f'}(t,x)^2}{\Phi_f(t,x))}\mu(x)\,\mathrm{d}x.$
On constate $J'(t)\le 0$ et d'après 7b. et 5d. : $|J'(t)|\le\frac{\sin(2t)}{4}\int\Phi_g(t,x)\mu(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\sin(2t)}{4}\int g(x)\mu(x)\,\mathrm{d}x.$
Comme J est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $J(0)-J(\pi/2)=\int_0^{\pi/2}-J'(t)\,\mathrm{d}t\le\int g(x)\mu(x)\,\mathrm{d}x\int\frac{\sin(2t)}{4}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int g(x)\mu(x)\,\mathrm{d}x$, ce qui est l'inégalité attendue d'après les calculs de 6.

8. Comme f est bornée et h continue, $h(f^2)$ est bornée donc $h(f^2)\mu$ est intégrable, c'est-à-dire que f admet une entropie par rapport à μ.
Soit $\delta>0$. On pose $f_\delta=\delta+f^2$, donc $f'_\delta=2ff'$. En particulier, $f_\delta\in C_b^2$ et $f_\delta\ge\delta$ et on peut appliquer les résultats de 7. à f_δ.
On pose $g_\delta=\frac{f_\delta'^2}{f_\delta}=\frac{4f^2f'^2}{\delta+f^2}\le 4f'^2$. On remarque : $\frac{1}{4}\int g_\delta(x)\mu(x)\,\mathrm{d}x\le\int f'(x)^2\mu(x)\,\mathrm{d}x$.
D'après 7c. : $\int h(\delta+f(x)^2)\mu(x)\,\mathrm{d}x-h\left(\int(\delta+f(x)^2)\mu(x)\,\mathrm{d}x\right)\le\int f'(x)^2\mu(x)\,\mathrm{d}x.$
Montrons que les termes du membre de gauche sont des fonctions continues de δ :
Pour le premier, si on se restreint à $\delta\le 1$, on peut majorer grossièrement $|h(\delta+f(x)^2)|$ par le maximum M de $|h|$ sur $[0,1+||f||_\infty^2]$, ce qui permet la domination : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall\delta\in[0,1]$, $|h(\delta+f(x)^2)\mu(x)|\le M\mu(x)$, donc $\delta\mapsto\int h(\delta+f(x)^2)\mu(x)\,\mathrm{d}x$ est continue sur $[0,1]$.
Pour le second, $\int(\delta+f(x)^2)\mu(x)\,\mathrm{d}x=\delta+\int f(x)^2\mu(x)\,\mathrm{d}x$, et comme h est continue sur $\mathbb{R}_+$, on peut donc faire tendre δ vers 0, ce qui donne l'inégalité demandée.

Partie III

9. Posons $f(x) = x$. C'est une fonction C^1 à dérivée constante, donc bornée, donc elle admet une entropie d'après l'hypothèse de cette partie.

D'après 2a. et 1., f^2m et fm sont intégrables, donc $x \mapsto (1 + |x| + x^2)m(x)$ est intégrable.

10.

(10a.) Supposons (2) prouvée pour des fonctions $g \in C_b^1$ telles que $\int g(x)m(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et $\int g^2(x)m(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

On pose $E = \int f(x)m(x)\,\mathrm{d}x$ et $\sigma \geq 0$ tel que $\sigma^2 = \int (f(x) - E)^2 m(x)\,\mathrm{d}x$. En développant, on vérifie que $\sigma^2 = \mathrm{Var}_m(f)$.

Si $\mathrm{Var}_m(f) = 0$, l'inégalité (2) est évidente, on suppose donc $\sigma > 0$. On pose alors $g = \dfrac{f - E}{\sigma}$. Il est clair que $g \in C_b^1$, $\int g(x)m(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et $\int g(x)^2 m(x)\,\mathrm{d}x = 1$, donc on peut appliquer (2) : $1 = \mathrm{Var}_m(g) \leq \dfrac{C}{2}\int \dfrac{|f'(x)|^2}{\sigma^2} m(x)\,\mathrm{d}x$, et donc $\mathrm{Var}_m(f) = \sigma^2 \leq \dfrac{C}{2}\int |f'(x)|^2 m(x)\,\mathrm{d}x$.

(10b.) On suppose donc $\int fm = 0$ et $\int f^2 m = 1$. On fixe $\varepsilon > 0$ et $f_\varepsilon = 1 + \varepsilon f$. On va ensuite faire tendre ε vers 0.

D'une part, on développe : $\int (1 + \varepsilon f(x))^2 m(x)\,\mathrm{d}x = 1 + 2\varepsilon \int f(x)m(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon^2 \int f(x)^2 m(x)\,\mathrm{d}x = 1 + \varepsilon^2$, donc $h\left(\int (1 + \varepsilon f(x))^2 m(x)\,\mathrm{d}x\right) = h(1 + \varepsilon^2) = (1 + \varepsilon^2)\ln(1 + \varepsilon^2) \sim \varepsilon^2$.

D'autre part, on considère le développement limité $h(1 + y)^2 = 2(1 + y)^2 \ln(1 + y) = 2y + 3y^2 + y^3\theta(y)$, où θ est une fonction bornée sur un intervalle $[-\alpha, +\alpha]$, mettons par $M > 0$.

Pour ε assez petit, $\varepsilon\|f\|_\infty \leq \alpha$. et $|\int \varepsilon^3 f(x)^3 \theta(\varepsilon f(x))m(x)\,\mathrm{d}x| \leq \varepsilon^3 M \int |f(x)^3| m(x)\,\mathrm{d}x$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ent}_m(f_\varepsilon) &= \int h(1 + \varepsilon f(x))\mu(x)\,\mathrm{d}x - h\left(\int (1 + \varepsilon f(x))^2 m(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \int 2\varepsilon f(x)\mu(x)\,\mathrm{d}x + \int 3\varepsilon^2 f(x)^2 \mu(x)\,\mathrm{d}x + O(\varepsilon^3) - \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \sim 2\varepsilon^2\end{aligned}$$

Or $f'_\varepsilon = \varepsilon f'$, donc d'après l'inégalité (1) : $\dfrac{\mathrm{Ent}_m(f_\varepsilon)}{\varepsilon^2} \leq C \int f'(x)^2 m(x)\,\mathrm{d}x$.

On fait tendre ε vers 0, d'où $1 \leq \dfrac{C}{2}\int f'(x)^2 m(x)\,\mathrm{d}x$, ce qui est l'inégalité attendue.

11.

(11a.) On peut remarquer $H(\lambda) > 0$. Par continuité et positivité de l'intégrande, $H(\lambda) = 0$ entraîne m identiquement nulle, ce qui est absurde pour une mesure.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda H'(\lambda) = \int \lambda f(x) \mathrm{e}^{\lambda f(x)} m(x)\,\mathrm{d}x = \int h(\mathrm{e}^{\lambda f(x)})m(x)\,\mathrm{d}x$ et $H(\lambda)\ln(H(\lambda)) = h(H(\lambda))$.

On pose $g(x) = \mathrm{e}^{\lambda f(x)/2}$ et on reconnaît : $\lambda H'(\lambda) - H(\lambda)\ln(H(\lambda)) = \mathrm{Ent}_m(g)$.

Or $g \in C_b^1$ car $f \in C_b^1$, donc par hypothèse de cette partie, g admet bien une entropie et $\mathrm{Ent}_m(g) \leq C \int \left(\lambda/2 f'(x)\mathrm{e}^{\lambda f(x)/2}\right)^2 m(x)\,\mathrm{d}x \leq C\lambda^2/4 \int f'(x)^2 \mathrm{e}^{\lambda f(x)} m(x)\,\mathrm{d}x \leq \dfrac{C\lambda^2}{4} H(\lambda)$, en tenant compte de $|f'(x)| \leq 1$.

(11b.) L'inégalité est évidente pour $\lambda = 0$, on va la prouver pour $\lambda > 0$.

Pour tout $\lambda > 0$, on pose $\varphi(\lambda) = \dfrac{\ln H(\lambda)}{\lambda}$. Cette fonction est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi'(\lambda) = \dfrac{\lambda H'(\lambda) - H(\lambda)\ln H(\lambda}{\lambda^2 H(\lambda)} \leq C/4$.

On a $H(0) = 1$ et $H'(0) = \int f(x)m(x)\,\mathrm{d}x$. Comme H est C^1 sur $\mathbb{R}$, on a au voisinage de 0 : $H(\lambda) = 1 + H'(0)\lambda + o(\lambda)$, donc $\varphi(\lambda)$ tend vers $H'(0)$ quand $\lambda \to 0$. On prolonge ainsi φ par continuité en 0.

Soit $\lambda > 0$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0, \lambda[$ tel que $\varphi(\lambda) - \varphi(0) = \varphi'(c) \leq \dfrac{C}{4}\lambda$, donc $\ln H(\lambda) \leq \lambda H'(0) + C\lambda^2/4$, c'est-à-dire :

$$H(\lambda) \leq \exp\left(\lambda \int f(x)m(x)\,\mathrm{d}x + C\lambda^2/4\right).$$

12. On ne peut pas appliquer directement 11. car $f : x \mapsto x$ n'est pas bornée. On pose donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto n\mathrm{Arctan}(x/n)$. Pour tout n, f_n est bornée (par $n\pi/2$), de classe C^1, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = \dfrac{1}{1+x^2/n^2} \in [0,1]$, donc f_n vérifie les hypothèses de 11. On peut donc écrire, pour tout $\lambda \geq 0$:
$\displaystyle\int \mathrm{e}^{\lambda f_n(x)} m(x)\,\mathrm{d}x \leq \exp\left(\lambda \int f_n(x)m(x)\,\mathrm{d}x + C\lambda^2/4\right)$.
En utilisant l'inégalité $|\mathrm{Arctan}(x)| \leq |x|$ (car Arctan est concave sur $\mathbb{R}_+$ et impaire), on remarque pour tout (n,x) : $|f_n(x)m(x)| \leq |x|m(x)$. Cette fonction est intégrable (domination), et comme pour tout x, $f_n(x) \to x$ quand n tend vers $+\infty$ (convergence simple), le théorème de convergence dominée assure (via la continuité de l'exponentielle) que le second membre tend vers $S = \exp\left(\lambda \displaystyle\int xm(x)\,\mathrm{d}x + C\lambda^2/4\right)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Pour n assez grand, on a donc :
$\displaystyle\int \mathrm{e}^{\lambda f_n(x)} m(x)\,\mathrm{d}x \leq S + \varepsilon$.

Si on fixe deux réels $a < b$, la positivité de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda f_n(x)}m(x)$ permet d'écrire : $\displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^{\lambda f_n(x)} m(x)\,\mathrm{d}x \leq S + \varepsilon$.
Pour $x \in [a,b]$, $\mathrm{e}^{\lambda f_n(x)}m(x)$ tend vers $\mathrm{e}^{\lambda x}m(x)$ (convergence simple) et $0 \leq \mathrm{e}^{\lambda f_n(x)}m(x) \leq \mathrm{e}^{\lambda x}m(x)$ (domination), cette dernière fonction étant continue donc intégrable sur $[a,b]$. Par le théorème de convergence dominée, il vient :
$\displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^{\lambda x} m(x)\,\mathrm{d}x \leq S + \varepsilon$.
Comme ceci est vrai de tout segment $[a,b]$, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}m(x)$, qui est positive, est intégrable sur $\mathbb{R}$, et $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\lambda x} m(x)\,\mathrm{d}x \leq S + \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\lambda x} m(x)\,\mathrm{d}x \leq S$, ce qui est l'inégalité attendue.

13.

(13a.) Soit $\lambda \geq 0$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$, $1 \leq \mathrm{e}^{\lambda(x-a)} = \mathrm{e}^{-\lambda a}\mathrm{e}^{\lambda x}$ et d'après 12., $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ est L^1 et :
$$\int_a^{+\infty} m(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda(x-a)} m(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\lambda a} \int \mathrm{e}^{\lambda x} m(x)\,\mathrm{d}x \leq \exp(\lambda(M-a) + C\lambda^2/4).$$
En dérivant l'argument de l'exponentielle, on constate qu'il admet un minimum pour $\lambda = 2(a-M)/C$. Pour cette valeur de λ, on obtient l'inégalité demandée.

(13b.) Notons que $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x^2}m(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, il suffit donc de justifier l'intégrabilité au voisinage de $\pm\infty$.

On remarque que, comme m est continue sur $\mathbb{R}$, l'application $x \mapsto -\displaystyle\int_x^{+\infty} m(t)\,dt$ est une primitive de m.

On fixe $\alpha < 1/C$ comme dans l'énoncé et $a \geq M$ comme dans la question précédente. On intègre formellement par parties :
$$\int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{\alpha x^2} m(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{\alpha x^2} \int_x^{+\infty} m(t)\,\mathrm{d}t\right]_a^{+\infty} + \int_a^{+\infty} 2\alpha x \mathrm{e}^{\alpha x^2} \left(\int_x^{+\infty} m(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$$
D'après 12., pour $x \geq a \leq M$: $0 \leq \mathrm{e}^{\alpha x^2} \displaystyle\int_x^{+\infty} m(t)\,\mathrm{d}t \leq \exp[(\alpha - 1/C)x^2 + 2Mx/C - M^2/C]$, qui tend vers 0 quand $x \to +\infty$ (car $\alpha < 1/C$), ce qui montre que le crochet est bien convergent.
Fixons $\beta \in]\alpha - 1/C, 0[$. On vérifie (croissances comparées) qu'au voisinage de $+\infty$: $x\exp[(\alpha - 1/C)x^2 + 2Mx/C - M^2/C] = o(\mathrm{e}^{\beta x^2})$. Ceci assure la convergence de la seconde intégrale.
On en déduit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{\alpha x^2} m(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente, donc la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x^2}m(x)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Étudions le cas de $-\infty$. Par un changement de variable évident, $\displaystyle\int_{-\infty}^{-a} \mathrm{e}^{\alpha x^2} m(x)\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{\alpha x^2} m(-x)\,\mathrm{d}x$ converge.
Or $m_1 : x \mapsto m(-x)$ est une mesure (clair). Vérifions qu'elle satisfait l'hypothèse du III.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 de dérivée bornée. On note $f_1 : x \mapsto f(-x)$, qui est également C^1, de dérivée bornée. D'après l'hypothèse de III, f_1 admet une entropie par rapport à m, donc $x \mapsto h(f(-x)^2)m(x)$ est L^1. On en déduit que $x \mapsto h(f(x)^2)m(-x)$ est L^1, donc f admet une entropie par rapport à m_1.
De plus, $\mathrm{Ent}_m(f_1) \leq C \displaystyle\int f_1'(x)^2 m(x)\,\mathrm{d}x$. Le même changement de variable assure que $\mathrm{Ent}_{m_1}(f) \leq C \displaystyle\int f'(x)^2 m_1(x)\,\mathrm{d}x$
On en déduit que les résultats prouvés ci-dessus s'appliquent à la mesure m_1. En particulier, pour $a \geq \displaystyle\int xm(-x)\,\mathrm{d}x = -M$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{\alpha x^2} m(-x)\,\mathrm{d}x$ converge, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{-a} \mathrm{e}^{\alpha x^2} m(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Finalement, $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x^2}m(x)$ est intégrable au voisinage de $-\infty$, et donc sur $\mathbb{R}$.

Partie IV

14.

(14a.) Analysons la situation : $K = \int p(x)\,dx$ est une constante strictement positive car p est continue et strictement positive. Si on note P une primitive de p, on peut écrire l'égalité sous la forme $P(u)' = K$, soit $P(u(t)) = Kt+K_0$. Comme $p > 0$, ses primitives sont strictement croissantes, donc injectives, on pourra écrire $u(t) = P^{-1}(Kt+K_0)$. Nécessairement, u est strictement croissante (par composition), on veut donc que u tende vers $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en 1, c'est-à-dire que P tende vers 0 en $-\infty$ (donc $K_0 = 0$) et K en $+\infty$.

Ces remarques informelles amènent à poser, pour $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt$. L'application P est bien définie car p est intégrable, c'est une primitive de p, donc elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont respectivement 0 et K, donc elle induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, K[$. Sa réciproque P^{-1} est de classe C^1 car $P' = p$ ne s'annule pas.

On pose donc, pour $t \in]0,1[$, $u(t) = P^{-1}(Kt)$. Par composition, u est C^1, bijective de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$, et un calcul direct donne $u'(t) = \dfrac{K}{p(P^{-1}(Kt))} = \dfrac{K}{p(u(t))}$.

(14b.) D'après 14a., pour tout $t \in]0,1[$: $\left(\int p(x)\,dx\right)\left(\cdot \int q(x)\,dx\right) = p(u(t))q(v(t))u'(t)v'(t)$.

Notons que les quatre facteurs sont positifs. On considère les racines carrées des deux membres.

D'après l'hypothèse (4) : $\sqrt{p(u(t))}\sqrt{q(v(t))} \leq r\left(\frac{u(t)+v(t)}{2}\right)$.

Rappelons que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$: $|ab| \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$, (vient de $(|a|-|b|)^2 \geq 0$). On en déduit : $\sqrt{u'(t)v'(t)} \leq \dfrac{u'(t)+v'(t)}{2}$.

Finalement, $\sqrt{\left(\int p(x)\,dx\right)\left(\cdot \int q(x)\,dx\right)} \leq r\left(\frac{u(t)+v(t)}{2}\right) \cdot \dfrac{u'(t)+v'(t)}{2}$.

On intègre les deux membres sur $]0,1[$, en tant que fonctions de t. Le membre de gauche est constant, donc inchangé par cette opération.

Considérons $w : t \in]0,1[\mapsto \dfrac{u(t)+v(t)}{2}$. C'est une fonction C^1, strictement croissante (somme de fonctions strictement croissante). Comme u et v tendent toutes les deux vers $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en 1, il en va de même pour w, qui définit une bijection croissante de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$.

Par changement de variable, on a donc : $\int_0^1 r\left(\dfrac{u(t)+v(t)}{2}\right)\dfrac{u'(t)+v'(t)}{2}\,dt = \int r(x)\,dx$, et on obtient finalement l'inégalité (5).

15.

(15a.) Si $y \notin A$, le premier membre est nul et l'inégalité est évidente.
Si $y \in A$, alors $d(x,A) \leq |x-y|$, donc $\frac{1}{2}d(x,A)^2 - x^2 - y^2 \leq (x-y)^2/2 - x^2 - y^2 = -(x+y)^2/2$ et on obtient l'inégalité demandée par croissance de exp.

(15b.) L'inégalité de 15a. ressemble fort à (4). Il suffit en effet de poser $p(x) = \exp(d(x,A)^2/2 - x^2)$, $q(x) = 1_A(x)\exp(-x^2)$ et $r(x) = \exp(-x^2)$ pour obtenir trois fonctions positives, continues par morceaux, intégrables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant (4). On applique donc 14b. :

$$\int \exp(d(x,A)^2/2 - x^2)\,dx \times \int 1_A(x)\exp(-x^2)\,dx \leq \left(\int \exp(-x^2)\,dx\right)^2.$$

En divisant les deux membres par π, puis en intégrant le membre de droite, il vient : $\int \exp(d(x,A)^2/2)\mu(x)\,dx \times \int 1_A(x)\mu(x)\,dx = \mu(A)\int \exp(d(x,A)^2/2)\mu(x)\,dx \leq 1$, ce qui est l'inégalité attendue.

16.

(16a.) On note $A = \bigcup_{k=1}^N I^k$ où I^k est un intervalle et N un entier naturel non nul. Par double inclusion, on montre que $A_t = \bigcup_{k=1}^N I_t^k$:
S'il existe k tel que $x \in I_t^k$, alors $d(x,A) \leq d(x,I_k) \leq t$, donc $x \in A_t$.
Réciproquement, supposons $x \in A_t$. On se donne une suite (a_i) d'éléments de A telle que $d(x,a_i) \to d(x,A)$. Comme A est une réunion finie d'intervalles, il existe au moins un intervalle I^k qui contient une infinité de termes de cette suite. On en déduit $d(x,I^k) \leq d(x,A) \leq t$, donc $x \in I_t^k$.
On vérifie maintenant que si I est un intervalle, alors I_t est encore un intervalle.
Si I est vide, alors $I_t = \mathbb{R}$. On suppose donc I non vide.

Fixons $x < w < y$ avec $x,\, y \in I_t$.
Supposons qu'il existe $a \in I$ tel que $a \leq w$. On a alors deux cas : s'il existe $b \in I$ tel que $w < b$, alors $w \in I$ et $d(w, A) = 0 \leq t$; sinon, I est situé à gauche de w, donc $d(w, I) \leq d(y, I) \leq t$. On procède symétriquement s'il existe $a \in I$ tel que $a \geq w$, en considérant cette fois la position de x. Finalement, $w \in I_t$, donc I_t est un intervalle, ce qui montre que $A_t \in \mathrm{Int}$ pour tout $t \geq 0$.

(16b.) Si $x \notin A_t$, $\exp(d(x, A)^2/2) \geq \exp(t^2/2)$, donc $(1 - 1_A(x)) \exp(d(x, A)^2/2) \geq (1 - 1_A(x)) \exp(t^2/2)$, puisque les deux membres sont nuls lorsque $x \in A$.

En multipliant par $\mu(x)$ et en intégrant, il vient : $\int (1 - 1_A(x)) \exp(d(x, A)^2/2)\mu(x)\,\mathrm{d}x \geq \exp(t^2/2)(1 - \mu(A_t))$.

D'autre part, on majore $1 - 1_A \leq 1$ et donc d'après 15b. :

$\int (1 - 1_A(x)) \exp(d(x, A)^2/2)\mu(x)\,\mathrm{d}x \leq \int \exp(d(x, A)^2/2)\mu(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{\mu(A)}$, d'où l'inégalité attendue.

EDB